

1) O que são esquemas numéricos explícitos, implícitos, semi-implícitos, pseudo-implícitos e iterativos? Quais são as vantagens e as desvantagens de cada um deles? Forneça exemplos utilizando a equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r f \quad (1)$$

Esquemas explícitos: são esquemas onde não é possível isolar ou explicitar uma solução em função de pontos de grade e instantes já determinados.

$$F_m^{n+1} = F_m^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(F_{m+1}^n - F_{m-1}^n)}{2\Delta x} + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (F_{m+1}^n - 2F_m^n + F_{m-1}^n) - r f_j^n \quad (2)$$

Esquemas implícitos: são os esquemas nos quais não é possível isolar ou explicitar uma solução em função de pontos de grade e instantes já determinados. Isso ocorre, pois as diferenças finitas são referentes ao nível de tempo renovado.

$$F_m^{n+1} = F_m^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(F_{m+1}^{n+1} - F_{m-1}^{n+1})}{2\Delta x} + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (F_{m+1}^{n+1} - 2F_m^{n+1} + F_{m-1}^{n+1}) - r f_j^n \quad (3)$$

Esquemas semi-implícitos: são os esquemas que combinam uma parte explícita com uma parte implícita, através de uma média.

$$F_m^{n+1} = F_m^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(F_{m+1}^{n+1} - F_{m-1}^{n+1})}{2\Delta x} + \frac{D}{2} \Delta t \left(\frac{F_{m+1}^{n+1} - 2F_m^{n+1} + F_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{F_{m+1}^n - 2F_m^n + F_{m-1}^n}{\Delta x^2} \right) - r f_j^n \quad (4)$$

Esquemas pseudo-implícitos: são esquemas implícitos em sua formulação, mas explícitos na realização.

$$? \quad (5)$$

Esquemas iterativos: são esquemas nos quais é calculada uma solução explícita provisória (Equação 6) e esta é utilizada para calcular a solução final (Equação 7).

$$F_m^* = F_m^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(F_{m+1}^n - F_{m-1}^n)}{2\Delta x} + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (F_{m+1}^n - 2F_m^n + F_{m-1}^n) - r f_j^n \quad (6)$$

$$F_m^{n+1} = F_m^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(F_{m+1}^* - F_{m-1}^*)}{2\Delta x} + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (F_{m+1}^* - 2F_m^* + F_{m-1}^*) - r f_j^n \quad (7)$$

Para compararmos as vantagens e desvantagens dos esquemas numéricos apresentados acima, temos que pensar em simplicidade de programação e estabilidade. Esquemas explícitos são de fácil programação, porém são condicionalmente estáveis ou incondicionalmente instáveis, ao passo que esquemas implícitos são incondicionalmente estáveis. Assim esquemas semi-implícitos e iterativos estão na metade do caminho entre explícitos e implícitos. A principal vantagem do semi-implícito é que ele representa de maneira explícita, algo que é implícito, facilitando a programação.

2) Discretize a equação fornecida na questão (1), considerando esquema implícito com diferenças finitas centradas no tempo e no espaço. Que efeitos físicos são considerados? Faça representações gráficas desses efeitos. Determine a condição de estabilidade para cada efeito separadamente.

A discretização é mostrada na Equação 8.

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = D \frac{f_{j+1}^{n+1} - 2f_j^{n+1} + f_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} - r f \quad (8)$$

São considerados os efeitos físicos de advecção, difusão e decaimento, ilustrados na Figura 1.

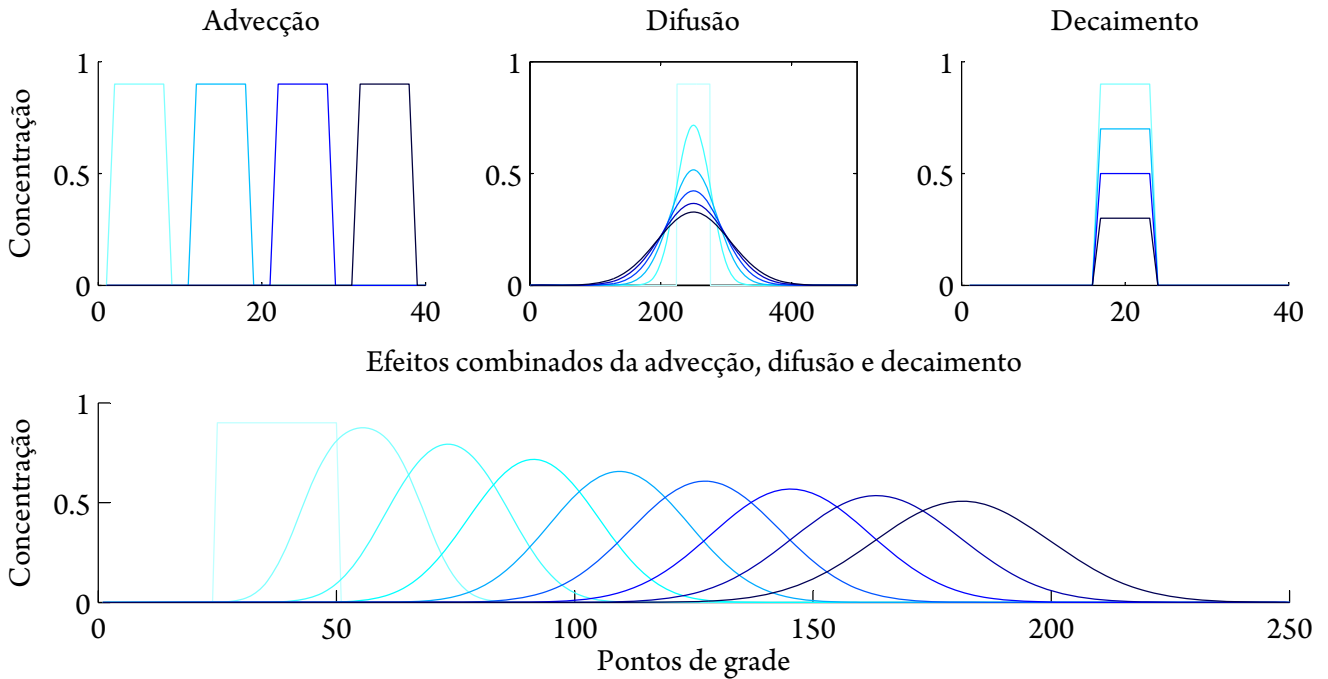


Figura 1: Os efeitos da advecção, difusão e decaimento. A passagem do tempo é indicada pela intensificação das cores.

3) O que são condições de contorno nas formas não gradiente, extrapolação linear e radiacional? O que significa dizer que as duas primeiras tem reflexão e a última pode ter restrições de uso?

Não gradiente: é uma condição de contorno na qual o valor do penúltimo ponto de grade é atribuído ao último.

Extrapolação linear: é a condição de contorno na qual o valor do último ponto de grade é calculado extrapolando-se o valor dos dois pontos anteriores.

Radiacional: é uma condição de contorno que consiste em “advectar” variáveis próximas do contorno ao contorno.

As duas primeiras apresentam reflexão parcial do sinal, ou seja, há a impressão de que parte do sinal retorna ao chegar no contorno. Para a primeira condição de contorno, a amplitude é igual a $A_0 \tan\left(\frac{K\Delta x}{2}\right)$, para a segunda, $A_0 \tan^2\left(\frac{K\Delta x}{2}\right)$.

A condição de contorno radiacional tem restrições de uso, pois só pode ser utilizada se o c calculado para advectar a propriedade respeitar a condição de estabilidade (Equação 9).

$$0 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (9)$$

4) Explique como pode se desenvolver a instabilidade não linear, usando como exemplo a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = R u^2 \quad (10)$$

Na equação apresentada, o termo $u \frac{\partial u}{\partial x}$ pode desenvolver instabilidade não-linear, por ser um produto de funções de variáveis do problema. Para explicarmos o desenvolvimento de instabilidade não linear para este termo, consideremos $u = u_0 \text{sen}(kx)$, tal que, para o termo mencionado acima:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \text{sen}(kx) u_0 k \cos(kx) = \frac{u_0^2}{2} \text{sen}(2kx) \quad (11)$$

O Ru^2 também é produto de duas funções de variáveis do problema, portanto também pode desenvolver instabilidade não linear. Assim, seguindo os passos adotados acima, obtemos:

$$Ru^2 = R u_0^2 \text{sen}^2(kx) = R u_0^2 \frac{1 - \cos(2kx)}{2} \quad (12)$$

Disso, é possível concluir que os termos não-lineares geram distúrbios, a partir de número de onda k (e com comprimento de onda L), com número de onda $2k$ e comprimento de onda $L/2$. Ou seja, este termo pode gerar distúrbios com comprimentos de ondas progressivamente menores que eventualmente, podem não ser resolvidos pela grade do modelo (lembrando que o espaçamento do modelo deve ser muito menor que o comprimento de onda dos fenômenos estudados).

5) Implemente um modelo numérico de advecção-difusão 2D para a Baía da Guanabara ($43^\circ W - 43^\circ 20' W$; $22^\circ 40' S - 22^\circ 57' S$) numa grade regular com espaçamento de 100m. Processe o modelo para a dispersão de um contaminante despejado de forma contínua no meio da Baía, sujeito a (a) correntes de 0,3m/s para sul; (b) correntes de 0,6m/s para norte; (c) correntes de 0,2m/s para oeste e (d) correntes de 0,1m/s para leste.

O modelo será entregue em formato digital (adv_dif.m e costa.dat). O conteúdo do arquivo adv_dif.m encontra-se anexo.

```
1  %% IOF 115 - Modelagem Numerica em Oceanografia
2  % 1a Lista de Exercicios
3  % Aluno: Danilo Rodrigues Vieira
4  % No. USP: 5653262
5
6  % Modelo de Advecao-Difusao 2D de vazamento continuo de poluente
7  % Local: Baia da Guanabara - RJ (43 00' W - 43 20' W e 22 57' S - 22 40' S)
8
9
10 clear; close all; clc;
11
12
13 %% 1) Definicao das constantes do modelo
14
15 nmax = 300; % numero passos de tempo
16 dh = 0.25; % coeficiente de difusao (m2/s)
17 dx = 100; % espacamento de grade (m)
18 dt = 600; % passo de tempo (s)
19 freqplo = 20; % frequencia de plotagem
20
21 % Pergunta ao usuario qual opcao de campo de velocidade
22 hperg = figure('color', 'w', 'Colormap', flipud(fliplr(hot(256))), ...
23 'NumberTitle', 'off', 'Name', 'Campo de velocidade', ...
24 'Units', 'Normalized', 'Position', [0.3 0.3 0.4 0.4], ...
25 'MenuBar', 'none', 'ToolBar', 'none');
26 b1 = uicontrol(hperg, 'Style', 'pushbutton', 'String', '(c): 0.2m/s para oeste', ...
27 'Units', 'Normalized', 'Position', [0.1 0.1 0.35 0.35], ...
28 'Callback', 'v=0;u=-0.2;close(hperg);');
29 b2 = uicontrol(hperg, 'Style', 'pushbutton', 'String', '(a): 0.3m/s para sul', ...
30 'Units', 'Normalized', 'Position', [0.1 0.55 0.35 0.35], ...
31 'Callback', 'v=-0.3;u=0;close(hperg);');
32 b3 = uicontrol(hperg, 'Style', 'pushbutton', 'String', '(d): 0.1m/s para leste', ...
33 'Units', 'Normalized', 'Position', [0.55 0.1 0.35 0.35], ...
34 'Callback', 'v=0;u=0.1;close();');
35 b4 = uicontrol(hperg, 'Style', 'pushbutton', 'String', '(b): 0.6m/s para norte', ...
36 'Units', 'Normalized', 'Position', [0.55 0.55 0.35 0.35], ...
37 'Callback', 'v=0.6;u=0;close(hperg);');
38 uiwait(hperg);
39
40
41 %% 2) Definicao da grade computacional
42
43 % Area abrangida pelo modelo
44 latmin = -22.9500; % 22 57'
45 latmax = -22.6667; % 22 40'
46 lonmin = -43.3333; % 43 20'
47 lonmax = -43.0000; % 43 00'
48
49 % Quantidade de pontos de grade
50 lmax = round((abs(latmin - latmax) * 60 * 1852) / dx); % pontos de grade em Y
51 mmax = round((abs(lonmin - lonmax) * 60 * 1852 * ... % pontos de grade em X
52 cosd(mean([latmin latmax])))/dx);
53
54 % Definicao das matrizes
55 cant = zeros(lmax,mmax);
56 catu = zeros(lmax,mmax);
57 cren = zeros(lmax,mmax);
58
59 % Construcao da grade lat/lon (apenas para plotagem)
60 lat = linspace(latmin,latmax,lmax);
61 lon = linspace(lonmin,lonmax,mmax);
62 [LON, LAT] = meshgrid(lon,lat);
63
64
65 %% 3) Calculo das constantes iniciais
66
67 dx2 = 2*dx;
68 qh = dh*2*dt/dx^2;
69
70
71 %% 4) Imposicao de condicoes iniciais
72
```

```

73 % Posicao da descarga continua (meio da baia)
74 ldsc = floor(lmax/2);%:ceil(lmax/2);
75 mdsc = floor(mmax/2);%:ceil(mmax/2);
76 desc = 10; % concentracao de poluente
77
78 % Introducao do poluente no ambiente
79 cren(ldsc,mdsc) = cren(ldsc,mdsc) + desc;
80
81
82
83 % Cria uma nova figura e ajusta suas propriedades
84 fh = figure('color', 'w', 'Colormap', flipud(fliplr(hot(256))), ...
85     'NumberTitle', 'off', 'Name', 'Ex.5 - Difusao e adveccao na Baia de Guanabara', ...
86     'Units', 'Normalized', 'Position', [0.1 0.1 0.8 0.8], ...
87     'MenuBar', 'none', 'ToolBar', 'none');
88
89 % Inicia o contador de plotagem para plotar imediatamente
90 contplo = 1;
91
92 % Carrega o arquivo da linha de costa
93 load('costa.dat');
94
95
96 %% 5) Inicio do laco no tempo
97
98 for n=2:nmax
99     % 7) Evolucao da solucao no tempo com a formula de recorrencia
100    cren(2:lmax-1,2:mmax-1) = cant(2:lmax-1,2:mmax-1)+...
101        qh*(cant(3:lmax,2:mmax-1)-2*cant(2:lmax-1,2:mmax-1)+cant(1:lmax-2,2:mmax-1))...
102        -v*((catu(3:lmax,2:mmax-1)-catu(1:lmax-2,2:mmax-1))/dx2)+...
103        qh*(cant(2:lmax-1,3:mmax)-2*cant(2:lmax-1,2:mmax-1)+cant(2:lmax-1,1:mmax-2))...
104        -u*((catu(2:lmax-1,3:mmax)-catu(2:lmax-1,1:mmax-2))/dx2);
105
106    cren(ldsc,mdsc) = cren(ldsc,mdsc) + desc; % Introducao do poluente no ambiente
107    cren(cren < 0) = 0;
108
109    contplo = contplo - 1;
110    if ~contplo
111        contplo = freqplo;
112
113        % 8) Apresentacao dos resultados
114        h(1) = subplot(3, 3, [1 2 4 5 7 8]);
115        pcolor(LON, LAT, cren);
116        hold on
117        plot(costa(:,1),costa(:,2), 'k', 'LineSmoothing', 'on');
118        hold off
119        title(['\bf Tempo ', num2str(n*dt/3600, '%.2F'),' horas']);
120        xlabel 'Longitude (\circ)'; ylabel 'Latitude (\circ)';
121        colorbar horiz;
122
123        h(2) = subplot(3, 3, 6);
124        lv = floor(lmax/2)-10:ceil(lmax/2)+10;
125        mv = floor(mmax/2)-10:ceil(mmax/2)+10;
126        pcolor(LON(lv,mv), LAT(lv,mv), cren(lv,mv));
127        hold on
128        plot(costa(:,1),costa(:,2), 'k', 'LineSmoothing', 'on');
129        hold off
130        title 'Detalhe';
131        xlabel 'Longitude (\circ)'; ylabel 'Latitude (\circ)';
132
133        set(h, 'CLim', [0 400]);
134        set(findobj('type','surface'),'FaceColor','flat','EdgeColor','none');
135        pause(0.02);
136    end
137
138    % 9) Transferencia de variaveis no tempo
139    cant = catu;
140    catu = cren;
141 end % 10) Retorna ao inicio at o numero total de iteracoes
142
143
144 % 11) Final do processamento

```