CAPÍTULO 13 - EQUAÇÕES HIDRODINÂMICAS BÁSICAS E ANÁLISE DE ESCALA

1. Introdução - Diferenciação total

Seja uma parcela de água c/ dimensões dx,dy,dz e componentes de velocidade u,v,w, segundo os eixos x,y,z (para Leste, Norte e para baixo). t representa o tempo.

Uma componente da aceleração desta partícula, du / dt, pode ser escrita levando em conta que u = u (x, y, z, t), o que resulta em:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{1}$$

e portanto,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2}$$

Analogamente, para uma propriedade qualquer, como por exemplo a temperatura T = T (x, y, z, t)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3}$$

As variações totais das propriedades podem portanto ser consideradas como as somas de suas variações locais (primeiro termo do segundo membro em (2) e (3)) e advectivas (demais termos do segundo membro em (2) e (3)).

2. Equação da continuidade

A Fig 1 mostra as massas que adentram e saem da parcela de água, cuja densidade é ρ. Dessa forma, a equação da continuidade pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{4}$$

Uma simplificação muito útil desta equação pode ser obtida considerando a densidade da água constante. Embora não estritamente correta para a água do mar, esta aproximação é satisfatória para muitas aplicações, de modo que a equação acima se reduz a:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5}$$

Esta relação considera a água do mar como “um fluido incompressível”.

3. A equação do movimento segundo suas componentes horizontais e vertical

Ao considerar a atuação das forças de Coriolis (com parâmetro f), do gradiente de pressão (p) e de atrito (com coeficientes de difusão A_h e A_v), resulta a equação do movimento na direção x:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}+w\,\frac{\partial u}{\partial z}-f\,v=$$

$$-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}+A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_v\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6}$$

Analogamente, para a direção y se tem:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\,\frac{\partial v}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}+w\,\frac{\partial v}{\partial z}+f\,u=$$

$$-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y}+A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_v\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{7}$$

Note-se que efeitos do atrito do vento na superfície e do atrito das correntes com o fundo do mar são considerados como condições de contorno das equações (6) e (7).

Na vertical, deve-se considerar, adicionalmente, a aceleração da gravidade g, de modo que se tem:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\,\frac{\partial w}{\partial x}+v\,\frac{\partial w}{\partial y}+w\,\frac{\partial w}{\partial z}=$$

$$-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}-g+A_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+A_v\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{8}$$

4. As equações de conservação do calor e do sal

A variação total de temperatura T (local mais advectiva) é resultante dos efeitos difusivos (com coeficientes A_{Th} e A_{Tv}) e da ação de fontes ou sorvedouros de calor (F_T):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} =$$

$$A_{Th}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + A_{Tv} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + F_T \qquad (9)$$

Analogamente, para a salinidade S, com coeficientes A_{Sh} e A_{Sv} e com fontes ou sorvedouros F_S:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} =$$

$$A_{Sh}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) + A_{Sv} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + F_S \qquad (10)$$

5. A equação de estado da água do mar

A "equação de estado da água do mar", relaciona a densidade ρ (em kg/m^3) com a temperatura t (em °C), a salinidade S (%o) e a pressão p (em bars), segundo a UNESCO (1981). Esta equação é válida para salinidades entre 0 e 42, temperaturas entre -2 e 40°C e pressão entre 0 e 1000 bars (1 Pa = 1 N/m^2 = 1 Kg/m/s^2 ; 1 Bar = 105 Pa ; 1 mbar = 100 Pa)

$$\rho = \rho\ (S,T,p) \qquad (11)$$

6 . O sistema de equações hidrodinâmicas básicas

No desenvolvimento acima, se tem o conjunto de 7 equações
(5), (6), (7), (8), (9), (10), (11)

que representam a hidrodinâmica do oceano, e cuja solução fornece as 7 variáveis dependentes
u, v, w, p, T, S, ρ

em função das 4 variáveis independentes
x, y, z, t

7. O sistema de equações incluindo o nível do mar e a aproximação hidrostática

A equação da continuidade (5) pode ser verticalmente integrada, de modo a fornecer a velocidade vertical w (em qualquer profundidade z) e o nível da superfície do mar η. Sendo H a profundidade total,

$$w = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{-H}^{z} u\, dz - \frac{\partial}{\partial y}\int_{-H}^{z} v\, dz \tag{12}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-H}^{\eta} u\, dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-H}^{\eta} v\, dz = 0 \tag{13}$$

Da equação para a componente vertical do movimento, se pode aproximar a relação hidrostática

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g \tag{14}$$

ou seja, sendo p_a a pressão atmosférica, ρ_0 a densidade média na coluna e ρ' o desvio em relação à média

$$p = p_a + \int_z^{\eta} \rho\, g\, dz = p_a + \rho_0\, g(\eta - z) + g\int_z^{\eta} \rho'\, dz \tag{15}$$

Desse modo, as equações do movimento segundo x e y passam a ser

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - f\, v = \\
&-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial x} - g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_z^{\eta} \rho' dz + \\
&A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{16}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + f u =$$
$$- \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial y} - g\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_z^\eta \rho' dz +$$
$$A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + A_v\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{17}$$

Finalizando, o sistema de equações hidrodinâmicas que considera o cálculo do nível do mar e a relação hidrostática é composto pelas 8 equações:
(12), (13), (15), (16), (17), (9), (10), (11)

que fornecem as 8 variáveis dependentes
w, η, p, u, v, T, S, ρ

em função das 4 variáveis independentes
x, y, z, t

8. Tipos de movimentos no oceano

Os termos mais utilizados para descrever a circulação oceânica são:

1) Circulação geral média – é a circulação permanente, média no tempo.
2) Célula de revolvimento meridional - parte da circulação termohalina.
3) Circulação gerada pelo vento – ocorre na superfície do oceano (primeiros 1000 m), podendo ser forçada por ventos locais ou remotos.
4) Giros (ou giros sub-tropicais, ou giros hemisféricos) - são as correntes de superfície, com dimensões próximas às das bacias oceânicas.
5) Correntes de contorno - que podem ser de contorno Oeste (intensas e concentradas, como a Corrente do Golfo e do Kuroshio) e de contorno Leste (fracas e espalhadas, como a Corrente de Benguela).
6) Jatos - são correntes extensas e concentradas, com dimensões de poucas centenas de km, praticamente perpendiculares às costas oeste.
7) Turbilhões de meso escala - são vórtices em escalas de poucas centenas de km.
8) Circulação de maré – associada às marés geradas pelo efeito gravitacional do Sol e da Lua.

9. Análise de escala

Embora os sistemas de equações hidrodinâmicas tenham uma grande complexidade, além de dificuldades de especificação de condições iniciais e de contorno, soluções com base em técnicas numéricas tem sido obtidas, nas mais diversas escalas espaciais.

A análise de escala permite a estimativa da ordem de grandeza de cada termo das equações hidrodinâmicas básicas, em função dos padrões de movimentos observados. Por exemplo, no interior dos oceanos, longe das camadas de Ekman da superfície (e do fundo), em distâncias horizontais da ordem de algumas dezenas de kilometros e em períodos de tempo de alguns dias, a aceleração do gradiente de pressão é balanceada quase que exatamente pela aceleração de Coriolis, num equilíbrio que se chama "balanço geostrófico".

É possível simplificar as equações do movimento para obter soluções que descrevem o balanço geostrófico, através da seguinte análise de escala. Para o oceano profundo, valores típicos da distância L, velocidade horizontal U, profundidade H, parâmetro de Coriolis f, gravidade g e densidade ρ são:

$$L = 10^6\ \text{m} \qquad f = 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$$

$$U = 10^{-1}\ \text{m/s} \qquad g = 10\ \text{m/s}^2$$

$$H = 10^3\ \text{m} \qquad \rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$$

A partir desses valores se pode calcular os valores típicos de velocidade vertical W, pressão P e tempo T, usando as equações da continuidade (5) e hidrostática (14):

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{W}{H} = \frac{U}{L}; \quad W = \frac{UH}{L} = \frac{10^{-1}\,10^3}{10^6}\ \text{m/s} = 10^{-4}\text{m/s}$$

$$P = \rho g z = 10^3\,10^1\,10^3 = 10^7\ \text{Pa}$$

$$T = L/U = 10^7\ \text{s}$$

Dessa forma, para a equação do movimento na vertical se tem

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega\, u\cos\varphi - g$$

$$\frac{W}{T} + \frac{UW}{L} + \frac{UW}{L} + \frac{W^2}{H} = \frac{P}{\rho H} + fU - g$$

$$10^{-11} + 10^{-11} + 10^{-11} + 10^{-14} = 10 \quad + 10^{-5} - 10$$

de modo que o equilíbrio na vertical pode ser expresso pela relação hidrostática

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

A análise de escala para a equação do movimento na direção x indica que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + fv$$

$$10^{-8} + 10^{-8} + 10^{-8} + 10^{-8} = 10^{-5} + 10^{-5}$$

e portanto a aceleração de gradiente de pressão equilibra a aceleração de Coriolis, levando às equações do balanço geostrófico:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = fv; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -fu; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

Este balanço se aplica a fluxos oceânicos com dimensões horizontais maiores que 50 km e períodos maiores que alguns dias.

10. A importância da rotação

A taxa de rotação da Terra (ou velocidade angular) é

$$\Omega = \frac{2\pi\ rad}{Tempo\ de\ 1\ revolução} = \frac{2\pi\ rad}{24\ h} = 7.292\times10^{-5} rad/s$$

Se o movimento do fluido evolui em escala de tempo comparável (ou maior) que o período de rotação, o fluido sente o efeito da rotação. Logo, ao calcular a razão

$$\varepsilon_t = \frac{Tempo\ de\ 1\ revolução}{Escala\ de\ tempo\ do\ movimento} = \frac{\Omega^{-1}}{T} = (\Omega T)^{-1}$$

se $\varepsilon_t \leq O(1)$, os efeitos de rotação da Terra devem ser considerados. Alternativamente, se pode usar a escala estimada pela velocidade

$$\varepsilon = \frac{Tempo\ de\ 1\ revolução}{Tempo\ para\ partícula\ percorrer\ L\ com\ velocidade\ U} = \frac{\Omega^{-1}}{L/U} = \frac{U}{\Omega L}$$

ε_t é o "número de Rossby local" e ε é o "número de Rossby advectivo".

11. A importância da estratificação

O oceano consiste tipicamente de camadas de fluido de diferentes densidades, que sob a ação da gravidade tendem a se arranjar em pilhas verticais correspondentes a um estado de energia potencial mínima. Os movimentos dos fluidos tendem a perturbar esse estado de equilíbrio, soerguendo fluidos mais densos e afundando fluidos mais leves.

Por conservação de energia, um aumento de energia potencial tem de ocorrer às custas de decréscimo de energia cinética. Logo, a importância da estratificação pode ser avaliada comparando as energias potencial e cinética, considerando as escalas de densidade média ρ_0 e de variação de densidade $\Delta\rho$:

$$S = \frac{Energia\ cinética\ disponível\ /\ unid.\ volume}{Variação\ de\ energia\ potencial\ /\ unid.\ volume} = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 U^2}{\Delta\rho\, gH}$$

Esta relação indica que para S ≤ O (1) os efeitos da estratificação tem que ser considerados; para S << 1 os movimentos verticais são limitados e para S >> 1 a estratificação não é importante.

EQUAÇÕES HIDRODINÂMICAS BÁSICAS

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}+w\,\frac{\partial u}{\partial z}-f\,v= -\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}+A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_v\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\,\frac{\partial v}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}+w\,\frac{\partial v}{\partial z}+f\,u= -\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y}+A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_v\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\,\frac{\partial w}{\partial x}+v\,\frac{\partial w}{\partial y}+w\,\frac{\partial w}{\partial z}= -\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}-g+A_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+A_v\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\,\frac{\partial T}{\partial x}+v\,\frac{\partial T}{\partial y}+w\,\frac{\partial T}{\partial z}= A_{Th}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+A_{Tv}\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+F_T \tag{9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\,\frac{\partial S}{\partial x}+v\,\frac{\partial S}{\partial y}+w\,\frac{\partial S}{\partial z}= A_{Sh}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)+A_{Sv}\,\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+F_S \tag{10}$$

$$\rho=\rho\ (S,T,p) \tag{11}$$

EQUAÇÕES HIDRODINÂMICAS BÁSICAS INCLUINDO O NÍVEL DO MAR E A RELAÇÃO HIDROSTÁTICA

$$w = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{-H}^{z} u\, dz - \frac{\partial}{\partial y}\int_{-H}^{z} v\, dz \tag{12}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-H}^{\eta} u\, dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-H}^{\eta} v\, dz = 0 \tag{13}$$

$$p = p_a + \int_z^{\eta} \rho\, g\, dz = p_a + \rho_0\, g(\eta - z) + g\int_z^{\eta} \rho' dz \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - f v = \\ &-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial x} - g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_z^{\eta} \rho' dz + \\ &A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + f u = \\ &-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial y} - g\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_z^{\eta} \rho' dz + \\ &A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + A_v\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \\ &A_{Th}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + A_{Tv}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + F_T \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} = \\ &A_{Sh}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) + A_{Sv}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + F_S \end{aligned} \tag{10}$$

$$\rho = \rho\ (S, T, p) \tag{11}$$

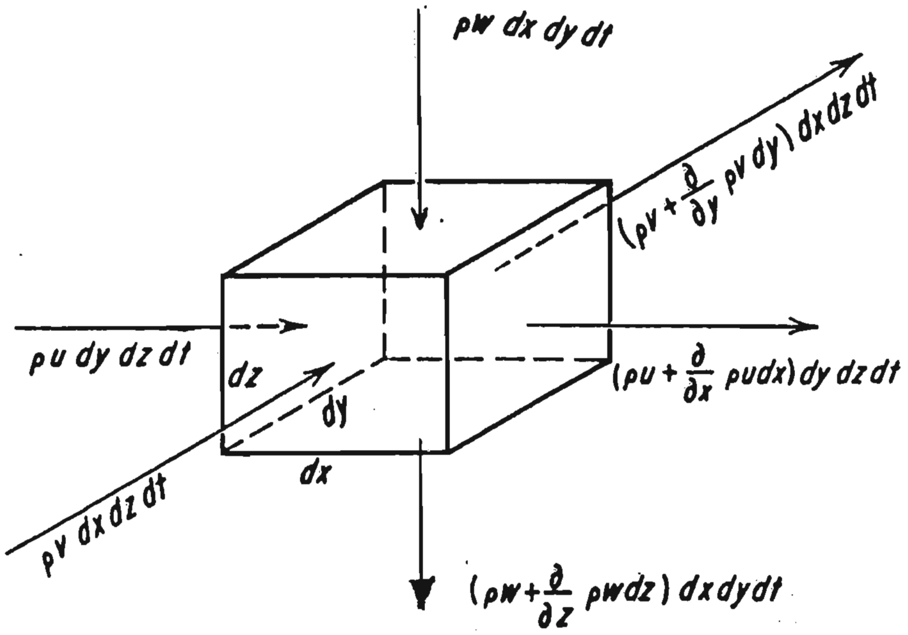

Figure 6.2 The mass balance in the cube, *dx dy dz*, in the derivation of the equation of continuity.

FIGURA 1